



Figure 1.1. Illustration d'un suivi de chemin.

avec $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{Q}[z_1, \dots, z_n]$, trouver les zéros “dans \mathbb{C}^n ”. Plus précisément et ici encore, il faudrait pouvoir approcher les zéros avec autant de précision que souhaitée.

Variante : prendre $P_1, \dots, P_n \in \mathbb{E}[z_1, \dots, z_n]$, où \mathbb{E} désigne l'ensemble des “constantes exp-log”, construits à partir de \mathbb{Q} en utilisant les opérations $+$, $-$, \times , exp et log.

Variante : chercher les racines dans \mathbb{R}^n .

1.4.3 Exemple : suivi de chemin

$$H(z, t) = 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} H_1(z_1, \dots, z_n, t) = 0 \\ \vdots \\ H_n(z_1, \dots, z_n, t) = 0 \end{array} \right. ,$$

avec $H(z, t) \in \mathbb{Q}[z, t]^n$ zéro-dimensionnel en z pour $t \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ et Σ fini.

Étant donné (z_0, t_0) avec $H(z_0, t_0) = 0$ et un chemin $t_0 \rightsquigarrow t_1$ qui évite Σ , calculer le chemin $z_0 \rightsquigarrow z_1$ avec $H(z_\lambda, t_\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.

1.4.4 Exemple : nombres de Bell

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = e^{e^z - 1}.$$

Problème 1 : calculer B_{10000} avec une erreur relative de 10^{-10} .

Problème 2 : trouver *automatiquement* le développement asymptotique

$$\log\left(\frac{B_n}{n!}\right) = n \left(-\log \log n + \frac{1}{\log n} + \frac{\log \log n}{\log n} + O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right) \right).$$

Problème 3 : pour $n \geq 10^{10}$, trouver une constante explicite pour le $O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)$.

1.5 Utilité du calcul analytique pour le calcul formel

1.5.1 Résolution de systèmes polynomiaux par homotopie

La technique incontestablement la plus importante en calcul analytique est la déformation. Une application astucieuse est la résolution de systèmes polynomiaux par homotopie. Supposons par exemple que l'on veuille résoudre un système

$$P(x, y) \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 - 3x + 5y + 8 = 0 \\ 3x^2 - xy + y^2 + 8x - 2y + 7 = 0 \end{cases}$$

Ce système est suffisamment « générique » pour que toutes ses solutions soient simples et pour qu'il y ait exactement $4 = 2 \times 2 = \deg P_1 \times \deg P_2$ solutions (comme prédit par la borne de Bézout). En particulier, le système « ressemble » (en degré, nombre et nature des solutions) au système beaucoup plus simple

$$\text{Fastoche}(x, y) \begin{cases} x^2 - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases}$$

On considère maintenant l'homotopie

$$H(x, y, t) \begin{cases} (x^2 - 1)t + (x^2 + 2xy - y^2 - 3x + 5y + 8)(1 - t) = 0 \\ (y^2 - 1)t + (3x^2 - xy + y^2 + 8x - 2y + 7)(1 - t) = 0 \end{cases}$$

qui donne le système Fastoche en $t = 1$ et le système du départ P en $t = 0$. Partant des solutions $x = \pm 1, y = \pm 1$ en $t = 1$, on obtient donc les solutions de P par déformation, en suivant les solutions quand on fait bouger t de 1 vers 0 (voir la section 1.4.3 et le chapitre 7).

1.5.2 Groupe de Galois d'une fonction algébrique

La technique de suivi de chemin est aussi utile pour le calcul du groupe de Galois d'un polynôme $P \in \mathbb{Q}[t, z]$, vu comme polynôme en z sur $\mathbb{Q}(t)$. On procède comme suit :

- Soit Σ l'ensemble des racines de $\text{disc}_z P$.
- Soient $z_{0,1}, \dots, z_{0,d}$ les racines de P en $t_0 \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$.

Pour tout $\sigma \in \Sigma$:

- Construire un chemin t_λ^σ avec $t_0^\sigma = t_1^\sigma = t_0$ tournant autour de σ .
- Remonter en un chemin z_λ^σ avec $P(z_\lambda^\sigma, t_\lambda^\sigma) = 0$ pour tout $\lambda \in [0, 1]$.
- Calculer la permutation π^σ de $\{1, \dots, d\}$ avec $z_{1,i}^\sigma = z_{0,\pi^\sigma(i)}^\sigma$.

On montre que les π^σ génèrent $\text{Gal}_{\mathbb{Q}(t)} P$.