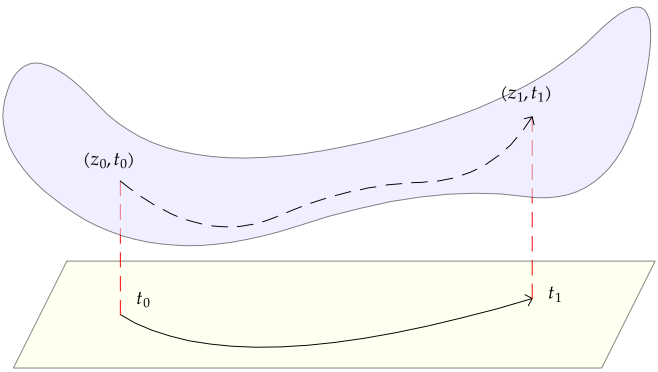

Figure 1.1. Illustration d'un suivi de chemin.

avec $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{Q}[z_1, \ldots, z_n]$, trouver les zéros "dans $\mathbb{C}^n$". Plus précisément et ici encore, il faudrait pouvoir approcher les zéros avec autant de précision que souhaitée.

Variante : prendre $P_1, \ldots, P_n \in \mathbb{E}[z_1, \ldots, z_n]$, où $\mathbb{E}$ désigne l'ensemble des "constantes exp-log", construits à partir de $\mathbb{Q}$ en utilisant les opérations $+, -, \times, \exp$ et $\log$.

Variante : chercher les racines dans $\mathbb{R}^n$.

1.4.3 Exemple : suivi de chemin

$$H(z,t) = 0 \qquad \begin{cases} H_1(z_1, \ldots, z_n, t) = 0 \\ \vdots \\ H_n(z_1, \ldots, z_n, t) = 0 \end{cases},$$

avec $H(z,t) \in \mathbb{Q}[z,t]^n$ zéro-dimensionnel en z pour $t \in \mathbb{C} \setminus \Sigma$ et Σ fini.

Étant donné (z_0, t_0) avec $H(z_0, t_0)$ et un chemin $t_0 \rightsquigarrow t_1$ qui évite Σ, calculer le chemin $z_0 \rightsquigarrow z_1$ avec $H(z_\lambda, t_\lambda) = 0$ pour tout $\lambda \in [0,1]$.

1.4.4 Exemple : nombres de Bell

$$B(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B_n}{n!} z^n = \mathrm{e}^{\mathrm{e}^z - 1}.$$

Problème 1 : calculer B_{10000} avec une erreur relative de 10^{-10}.

Problème 2 : trouver *automatiquement* le développement asymptotique

$$\log\left(\frac{B_n}{n!}\right) = n\left(-\log\log n + \frac{1}{\log n} + \frac{\log\log n}{\log n} + O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)\right).$$

Problème 3 : pour $n \geqslant 10^{10}$, trouver une constante explicite pour le $O\left(\frac{1}{\log^2 n}\right)$.